Théorème de Weierstrass par la convolution

Définition : On dit que la famille de fonction $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si :

(i) $\chi_n \geq 0$

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi_n = 1$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{|t|\geq\alpha} \chi_n(t)\mathrm{d}t = 0$ pour tout $\alpha > 0$

Théorème : On note $\mathcal{E} = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$. L'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans $\mathcal{E}$.

Lemme 1 : Soit f continue à support compact sur $\mathbb{R}$ et $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Alors $(\chi_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Preuve du lemme : Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue à support compact le théorème de Heine nous donne l'existence d'un $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ (c'est la définition de l'uniforme continuité). Comme les χ_n sont des approximations de l'unité on peut se donner $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\displaystyle\int_{|t|\geq\delta} \chi_n(t)\mathrm{d}t \leq \varepsilon$. Ainsi, si $n \geq N$ on a

$$\begin{aligned}
|(\chi_n * f)(x) - f(x)| &= |\int \chi_n(t)f(x-t) - \chi_n(t)f(x)\mathrm{d}t| \\
&\leq \int_{|t|\geq\delta} |\chi_n(t)(f(x-t) - f(x))|\mathrm{d}t + \int_{|t|\leq\delta} |\chi_n(t)(f(x-t) - f(x))|\mathrm{d}t \\
&\leq 2||f||_\infty\varepsilon + 2\delta\varepsilon
\end{aligned}$$

quitte à prendre δ plus petit que 1 on vient de montrer que pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|(\chi_n * f)(x) - f(x)| \leq (2||f||_\infty + 1)\varepsilon$ ce qui conclut la preuve du lemme (on a utilisé le fait que la masse de χ_n vaut 1 pour la première égalité). $\square$

Preuve du théorème :

Étape 1 : Définissons une famille d'approximations de l'unité de la manière suivante :

Si $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \mathrm{d}t$ et $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $p_n(t) = \dfrac{(1-t^2)^n}{a_n}$ si $|t| \leq 1$ et 0 sinon.

Les points (i) et (ii) sont clairement vérifiés par définition. Justifions le troisième point. Si $\alpha \geq 1$ les intégrales sont toutes nulles donc c'est bon. Soit donc $0 < \alpha < 1$.En remarquant que les p_n sont paires on a

$$\int_{|t|\geq\alpha} p_n(t)\mathrm{d}t \leq \frac{2}{a_n} \int_{\alpha}^{1} (1-\alpha^2)^n \mathrm{d}t = \frac{2}{a_n}(1-\alpha)(1-\alpha^2)^n.$$

De plus on a $a_n \geq 1 \displaystyle\int_0^1 t(1-t^2)^n \mathrm{d}t = \left[\frac{-(1-t^2)^n}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1}$. Ainsi,

$$\int_{|t|\geq\alpha} p_n(t)\mathrm{d}t \leq \frac{(1-\alpha)(1-\alpha^2)^n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une approximation de l'unité.

Étape 2 : On montre que si f est à support dans $[-1/2, 1/2]$ alors elle est limite uniforme de polynômes.

Soit f continue à support dans $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. On va montrer que la famille $(p_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynôme, ce qui va permettre de conclure grâce au lemme 1. Soit x un réel. Si $t, x \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $|x-t| \leq 1$ et donc si $x \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on a

$$\begin{aligned}(p_n * f)(x) &= \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} p_n(x-t)f(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} q_k(t)f(t)\mathrm{d}t\right) x^k\end{aligned}$$

où $q_k(t)$ désigne le $k$ème coefficient du polynôme $(1-(x-t)^2)^n$. Donc pour tout n, $p_n * f$ est polynomiale sur $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Étape 3 : On se ramène au cas particulier de l'étape 2 par un changement de variable affine pour prouver le résultat voulu.

Soit $f \in \mathcal{E}$. On peut étendre f par continuité sur $\mathbb{R}$ de sorte que f soit à support dans $[-1, 2]$ (avec des morceaux affines par exemple). On pose alors $\varphi : [-1/2, 1/2] \to [-1, 2]$ telle que $\varphi(x) = \frac{x}{3} - \frac{5}{6}$ (c'est une bijection). Alors $f \circ \varphi^{-1}$ est à support dans $[-1/2, 1/2]$ donc on a vu que l'on peut approcher $f \circ \varphi^{-1}$ par une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme φ est affine, n'importe quel polynôme composée avec φ en est encore un donc $(P_n \circ \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une suite de polynômes qui approchent uniformément f et on a le résultat voulu.$\square$